Scientific Bulletin of Namangan State University

Volume 1 | Issue 7 Article 4

9-10-2019

ON THE STATEMENT AND STUDY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF THE FOURTH ORDER OF THE PARABOL-HYPERBOLIC TYPE IN THE FIVE-ANGULAR REGION

Sanjarbek Mirzayevich Mamajonov
Teacher Kokand state pedagogical institute

ON THE STATEMENT AND STUDY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF THE FOURTH ORDER OF THE PARABOL-HYPERBOLIC TYPE IN THE FIVE-ANGULAR REGION

УДК 517.956.6

К ПОСТАНОВКЕ И ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Мамажонов Санжарбек Мирзаевич
преподаватель Конадского государственного педагогического инсититута

Аннотация: *В настоящей работе ставится и исследуется одна краевая задача для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка. Доказывается однозначная разрешимость этой поставленной задачи методами построения решения, интегральных и дифференциальных уравнений.*

Ключевые слова: *Дифференциальные и интегральные уравнения, метод построения решения, краевая задача, параболо-гиперболический тип,однозначная разрешимость.*

ТЎРТИНЧИ ТАРТИБЛИ ПАРАБОЛИК-ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМА УЧУН БЕШБУРЧАКЛИ СОҲАДА БИТТА ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАНИНГ ҚЎЙИЛИШИ ВА ТАДҚИҚ ЭТИЛИШИГА ДОИР

Мамажонов Санжарбек Мирзаевич
Қўқон давлат педагогика институти ўқитувчиси

Аннотация: *Ушбу ишда тўртинчи тартибли параболик-гиперболик типдаги тенглама учун битта чегаравий масала қўйилади ва тадқиқ этилади.Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилиши ечимни қуриш усули, интеграл ва дифференциал тенгламалар усуллари билан исбот этилади.*

Таянч иборалар: *Дифференциал ва интеграл тенгламалар,ечимни қуриш усули, чегаравий масала,параболик-гиперболик тип,бир қийматли ечилиш.*

ON THE STATEMENT AND STUDY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF THE FOURTH ORDER OF THE PARABOL-HYPERBOLIC TYPE IN THE FIVE-ANGULAR REGION

Mamajonov Sanjarbek Mirzayevich
Teacher Kokand state pedagogical institute

Abstract: *In the article we pose and study one boundary-value problem for a fourth-order parabolic-hyperbolic equation. The unique solvability of this task is proved by the methods of constructing a solution, integral and differential equations.*

Key words: *Differential and integral equations, solution construction method, boundary value problem,parabolic-hyperbolic type, unique solvability.*

В настоящей статье в пятиугольной области G плоскости xOy ставится и исследуется одна краевая задача для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0,\ (1)$$

где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup J_1\cup J_2;G_1-$ прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0),B_0(1,1),A_0(0,1);G_2-$ треугольник с вершинами в точках $B,C(0,-1)$, $D(-1,0);G_3-$прямоугольник с вершинами в точках $A,D,D_0(-1,1),A_0;J_1-$ открытый отрезок с вершинами в точках $B,D;J_2-$открытый отрезок с вершинами в точках $A,A_0;Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_y, & (x,y)\in D_1,\\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in D_i,\ i=2,3.\end{cases}$

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача-1.Найти функцию $u(x,y)$,которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2$ имеет непрерывные производные,участвующие в уравнение (1),причем u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}–непрерывны в G вплоть до части границы области G,указанные в краевых условиях;2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\setminus J_1\setminus J_2$;3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$u(1,y)=\varphi_1(y),\quad 0\le y\le 1;(2)$

$u(-1,y)=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le 1;(3)$

$u_x(-1,y)=\varphi_3(y),\quad 0\le y\le 1;(4)$

$u_{xx}(-1,y)=\varphi_4(y),\quad 0\le y\le 1;(5)$

$u|_{CF}=\psi_1(x),\ 0\le x\le 1/2;(6)$

$u|_{CD}=\psi_2(x),\ -1\le x\le 0;(7)$

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_3(x),\ 0\le x\le 1;(8)$

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{DC}=\psi_4(x),\ -1\le x\le 0;\ (9)$

4) удовлетворяет следующим условия склеивания на линиях изменения типа:

$u(x,+0)=u(x,-0)=T(x),\ -1\le x\le 1;(10)$

$u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=N(x),\ -1\le x\le 1;(11)$

$u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=M(x),\ x\in(-1,0)\cup(0,1);(12)$

$u(+0,y)=u(-0,y)=\tau_3(y),\ 0\le y\le 1;(13)$

$u_x(+0,y)=u_x(-0,y)=\nu_3(y),\ 0\le y\le 1;(14)$

$u_{xx}(+0,y)=u_{xx}(-0,y)=\mu_3(y),\ 0<y<1;(15)$

$u_{xxx}(+0,y)=u_{xxx}(-0,y)=\theta_3(y),\ 0<y<1,(16)$

где $\varphi_i\ (i=\overline{1,4})$, $\psi_j\ (j=\overline{1,4})$–заданные достаточно гладкие функции, $n-$внутренняя нормаль к прямой $x+y=-1$ или $x-y=1$,а $F(1/2,-1/2)$,

$$T(x)=\begin{cases}\tau_1(x), & если\ \ 0\le x\le 1,\\ \tau_2(x), & если\ \ -1\le x\le 0;\end{cases}\quad N(x)=\begin{cases}\nu_1(x), & если\ \ 0\le x\le 1,\\ \nu_2(x), & если\ \ -1\le x\le 0;\end{cases}$$

$M(x)=\begin{cases}\mu_1(x), & если\ \ 0<x<1,\\ \mu_2(x), & если\ \ -1<x<0;\end{cases}$ $\tau_i,\ \nu_i,\ \mu_i\ (i=\overline{1,3})$, θ_3 –неизвестные пока достаточно гладкие функции.

Теорема.Если $\varphi_1,\varphi_2\in C^4[0,1],\varphi_3,\varphi_4\in C^3[0,1],\psi_1\in C^4[0,1/2],\psi_2\in C^4[-1,0],$ $\psi_3\in C^3[0,1]$, $\psi_4\in C^3[-1,0]$,причем выполняется условие согласования $\psi_1(0)=\psi_2(0)$, $\varphi_2(0)=\psi_2(-1),\psi_4'(0)=-\psi_3'(0)$,то задача-1 допускает единственное решение.

Доказательство.Теорему докажем методом построения решения.Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_{11}(x-y)+\omega_{12}(y),\ (x,y)\in G_1,\ (17)$$

$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_{i1}(x-y)+\omega_{i2}(y),\ (x,y)\in G_i\quad (i=2,3),\ (18)$$

где введено обозначение $u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y)\in G_i\ \left(i=\overline{1,3}\right)$,причем $\omega_{i1}(x-y),\ \omega_{i2}(y)\ \left(i=\overline{1,3}\right)$ неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Исследование будем провести сначала в области G_2.Решение уравнения (18) $(i=2)$,удовлетворяющее условиям (10),(11) представляется в виде

$$u_2(x,y)=\frac{1}{2}\left[T(x+y)+T(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\omega_{21}(\xi-\eta)\,d\xi-\int_0^y(y-\eta)\,\omega_{22}(\eta)\,d\eta\ .(19)$$

Подставляя (19) в условия (8) и (9) после упрощений, имеем

$$\omega_{21}(1)+\omega_{22}(x-1)=-\sqrt{2}\psi_3'(x),\ 0\le x\le 1,(20)$$

$$\omega_{21}(2x+1)+\omega_{22}(-x-1)=\sqrt{2}\psi_4'(x),\ -1\le x\le 0\ .(21)$$

В равенстве (20) меняя аргумент $x-1$ на y, получим

$$\omega_{22}(y)=-\sqrt{2}\psi_3'(y+1)-\omega_{21}(1),\ -1\le y\le 0,(22)$$

В равенстве (22) полагая $y=-x-1$ и подставляя полученное уравнение в (21) и меняя аргумент $2x+1$ на $x-y$,находим

$$\omega_{21}(x-y)=\sqrt{2}\psi_4'\left(\frac{x-y-1}{2}\right)+\sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{1-x+y}{2}\right)+\omega_{21}(1),\ -1\le x-y\le 1\ .(23)$$

Из (23) следует $\psi_4'(0)=-\psi_3'(0)$.Слагая (22) и (23),имеем

$$\omega_{21}(x-y)+\omega_{22}(y)=\sqrt{2}\psi_4'\left(\frac{x-y-1}{2}\right)+\sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{1-x+y}{2}\right)-\sqrt{2}\psi_3'(y+1),\ -1\le x-y\le 1\,.$$

Теперь подставляя (19) в (7), имеем первое соотношение между неизвестными функциями $T(x)$ и $N(x)$:

$$T'(x)-N(x)=\alpha_1(x),\ -1\le x\le 1,(24)$$

где

$$\alpha_1(x)=\psi_2'\left(\frac{x-1}{2}\right)-\int_0^{-\frac{x+1}{2}}\left[\omega_{21}(x)+\omega_{22}(\eta)\right]d\eta .$$

а) При $0\le x\le 1$ уравнение (24) имеет вид

$$\tau_1'(x)-\nu_1(x)=\alpha_1(x),\ 0\le x\le 1.(25)$$

б) А при $-1\le x\le 0-$

$$\tau_2'(x)-\nu_2(x)=\alpha_1(x),\ -1\le x\le 0.(26)$$

Далее, подставляя (19) в (6), получим соотношение

$$\tau_2'(x)+\nu_2(x)=\delta_1(x),\ -1\le x\le 0,(27)$$

где

$$\delta_1(x)=\psi_1'\left(\frac{x+1}{2}\right)+\int_0^{\frac{x-1}{2}}\left[\omega_{21}(x-2\eta)+\omega_{22}(\eta)\right]d\eta .$$

Из (26) и (27) находим функции $\tau_2'(x)$ и $\nu_2(x)$:

$$\tau_2'(x)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(x)+\delta_1(x)\right],\nu_2(x)=\frac{1}{2}\left[\delta_1(x)-\alpha_1(x)\right].(28)$$

Интегрируя первое из равенств (28) от -1 до x,находим

$$\tau_2(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1).$$

Теперь переходя в уравнении (18) $(i=2)$, к пределу при $y\to 0$,в силу (10) и (12) получим соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$\mu_1(x)=\tau_1''(x)-\omega_{21}(x)-\omega_{22}(0).(29)$$

Далее,применяя оператор $\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}$ к уравнению (17) и устремляя y к нулю,получим еще одно соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$\tau_1'''(x)+\nu_1''(x)-\nu_1'(x)-\mu_1(x)=\omega_{12}'(0).\ (30)$$

Исключая из (25),(29) и (30) функции $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$,затем интегрируя полученное уравнение дважды от 0 до x,имеем

$$\tau_1'(x)+\tau_1(x)=\alpha_2(x)+\omega_{12}'(0)\frac{x^2}{4}+k_1x+k_2,\ 0\le x\le 1,$$

где

$$\alpha_2(x)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(x)+\int_0^x\alpha_1(t)dt-\int_0^x(x-t)\left[\omega_{21}(t)+\omega_{22}(0)\right]dt\right],$$

а $\omega_{12}'(0),k_1,k_2$ – неизвестные пока постоянные.

Теперь решая последнее уравнение при условиях

$$\tau_1(1)=\varphi_1(0),\tau_1'(1)=\varphi_1'(0)-\sqrt{2}\psi_3(1),\tau_1(0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1),$$

$\tau_1'(0)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right]$,находим функцию $\tau_1(x)$:

$$\tau_1(x)=\int_0^x \exp(x-t)\alpha_2(t)dt-\frac{\omega'_{12}(0)}{2}\left[\exp(x)-1-x-\frac{x^2}{2}\right]+$$
$$+k_1\left[\exp(x)-x-1\right]+k_2\left[\exp(x)-1\right]+k_3\exp(x),$$

где

$$k_3=\frac{1}{2}\int_{-1}^0\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1),\, k_2=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right]-\alpha_2(1)-k_3,$$
$$k_1=\varphi'_1(0)-\varphi_1(0)-\sqrt{2}\psi_3(1)-\alpha_2(1)-k_2,$$
$$\omega'_{12}(0)=\frac{2}{e-2}\left[(e-1)\varphi_1(0)-ek_3-\int_0^1\exp(1-t)\alpha_2(t)dt\right]-2\left[\varphi'_1(0)-\sqrt{2}\psi_3(1)-\alpha_2(1)-k_2\right].$$

Тогда будут известными и функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$, $u_2(x,y)$

Переходя в уравнениях (18) $(i=2)$ и (18) $(i=3)$ к пределу при $y\to 0$ с учетом условий (10),(12) и производя замену $x \to x-y$,находим

$$\omega_{31}(x-y)=\omega_{21}(x-y)+\omega_{22}(0)-\omega_{32}(0),\ -1\le x-y\le 0 .(31)$$

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области G_3. Сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{3xx}-u_{3yy}=\Omega_{31}(x-y)+\omega_{32}(y),\\ u_3(x,0)=T_2(x),\ u_{3y}(x,0)=N_2(x),\ -2\le x\le 1,\\ u_3(-1,y)=\varphi_2(y),\ u_{3x}(-1,y)=\varphi_3(y),\ u_{3xx}(-1,y)=\varphi_4(y), u_3(0,y)=\tau_3(y),\ 0\le y\le 1, \end{cases}$$

где функции $T_2(x)$, $N_2(x)$, $\Omega_{31}(x-y)$ определяются следующим образом:в промежутке $-1\le x\le 0$ функции $T_2(x), N_2(x)$ имеют вид: $T_2(x)=\tau_2(x)$, $N_2(x)=\nu_2(x)$,функция $\Omega_{31}(x-y)$ при $-\le x-y\le 0$ имеет вид: $\Omega_{31}(x-y)=\omega_{31}(x-y)$,а в промежутках $-2\le x\le -1$ и $0\le x\le 1$ функции $T_2(x)$, $N_2(x)$ и в промежутках $-2\le x-y\le -1$ и $0\le x-y\le 1$ функция $\Omega_{31}(x-y)$ пока неизвестны.

Решение этой задачи будем искать в виде

$$u_3(x,y)=u_{31}(x,y)+u_{32}(x,y)+u_{33}(x,y),(32)$$

где $u_{31}(x,y)-$решение задачи

$$\begin{cases} u_{31xx}-u_{31yy}=0,\\ u_{31}(x,0)=T_2(x),\ u_{31y}(x,0)=0,\ -2\le x\le 1,\ (33)\\ u_{31}(-1,y)=\varphi_2(y),\ u_{31}(0,y)=\tau_3(y), \end{cases}$$

$u_{32}(x,y)-$решение задачи

$$\begin{cases} u_{32xx}-u_{32yy}=\omega_{32}(y),\\ u_{32}(x,0)=0,\ u_{32y}(x,0)=N_2(x),\ -2\le x\le 1,\ \ (34)\\ u_{32}(-1,y)=0,\ u_{32}(0,y)=0, \end{cases}$$

$u_{33}(x,y)-$решение задачи

$$\begin{cases} u_{33xx} - u_{33yy} = \Omega_{31}(x-y), \\ u_{33}(x,0) = 0,\ u_{33y}(x,0) = 0,\ -2 \le x \le 1, (35) \\ u_{33}(-1,y) = 0,\ u_{33}(0,y) = 0. \end{cases}$$

Методом продолжения находим решения задач (33)-(35).Они имеют вид

$$u_{31}(x,y) = \frac{T_2(x+y) + T_2(x-y)}{2}, (36)$$

$$u_{32}(x,y) = \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} N_2(t)\,dt - \int_0^y (y-\eta)\,\omega_{32}(\eta)\,d\eta, (37)$$

$$u_{33}(x,y) = -\frac{1}{2}\int_0^y d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \Omega_{31}(\xi-\eta)\,d\xi. (38)$$

где

$$T_2(x) = \begin{cases} 2\varphi_2(-1-x) - \tau_2(-2-x),\ -2 \le x \le -1, \\ \tau_2(x),\ -1 \le x \le 0, \\ 2\tau_3(x) - \tau_2(-x),\ 0 \le x \le 1; \end{cases}$$

$$N_2(x) = \begin{cases} 2\int_0^{-1-x} \omega_{32}(\eta)\,d\eta - \nu_2(-2-x),\ -2 \le x \le -1, \\ \nu_2(x),\ -1 \le x \le 0, \\ 2\int_0^x \omega_{32}(\eta)\,d\eta - \nu_2(-x),\ 0 \le x \le 1; \end{cases}$$

а функция $\Omega_{31}(x-y)$ определяется следующим образом.

Первые два условия задачи (35) выполняются автоматически.удовлетворяя третье условию,находим

$$\frac{1}{2}\int_{-1-y}^{y-1} \Omega_{31}(b_2 z)\,dz = -y\Omega_{31}(-1-y). (39)$$

Дифференцируя (39), находим

$$\omega_{31}(y-1) + (3-2y)\Omega_{31}(-1-y) - y\Omega'(-1-y) = 0. (40)$$

Из последнего равенства следует $\omega_{31}(-1) = 0$ или в силу (31) имеем $\omega_{32}(0) = \omega_{21}(-1) + \omega_{22}(0)$.

Далее, удовлетворяя четвертое условие задачи (35),имеем

$$\frac{1}{2}\int_{-y}^{y} \Omega_{31}(z)\,dz = -y\omega_{31}(-y). (41)$$

Дифференцируя (41),получим

$$\Omega_{31}(y) = (2y-3)\omega_{31}(-y) + y\omega'_{31}(-y) = 0. (42)$$

Из (42) при $y = 0$ следует $\omega_{31}(0) = 0$.

Подставляя (36), (37), (38) в (32), получим

$$u_3(x,y) = \frac{T_2(x+y) + T_2(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} N_2(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^y d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \Omega_{31}(\xi-\eta)\,d\xi -$$

$$+\int_0^y (y-\eta)\omega_{32}(\eta)d\eta \,.(43)$$

Дифференцируя (43) по x и полагая в полученном равенстве $x \to -1$,в силу (39), получим

$$\varphi_3(y) = \tau_2'(y-1) - \varphi_2'(y) + \nu_2(y-1) - \int_0^y \omega_{32}(\eta)d\eta - \frac{1}{4}\int_{-1-y}^{y-1} \Omega_{31}(t)dt + \frac{y}{2}\Omega_{31}(-1-y).(44)$$

Дифференцируя последнее равенство,после некоторых выкладок, имеем соотношение

$$\varphi_3'(y) = \tau_2''(y-1) - \varphi_2''(y) + \nu_2'(y-1) - \omega_{32}(y) -$$
$$-\frac{1}{4}\omega_{31}(y-1) + \frac{1}{4}\Omega_{31}(-1-y) - \frac{y}{2}\Omega_{31}'(-1-y).(45)$$

Подставляя (43) в условие (5),приходим к соотношению

$$\varphi_4(y) = \varphi_2''(y) + \omega_{32}(y) - \frac{1}{4}\omega_{31}(y-1) + \frac{1}{4}\Omega_{31}(-1-y) - \frac{y}{2}\Omega_{31}'(-1-y).$$

Исключая из последнего равенства и (45) функцию $\frac{y}{2}\Omega_{31}'(-1-y)$, находим

$$\omega_{32}(y) = \frac{1}{2}\left[\tau_2''(y-1) - 2\varphi_2''(y) + \varphi_4(y) - \varphi_3'(y) + \nu_2'(y-1)\right].(46)$$

Учитывая (39),равенство (44) можно переписать в виде

$$\varphi_3(y) = \tau_2'(y-1) - \varphi_2'(y) + \nu_2(y-1) - \int_0^y \omega_{32}(\eta)d\eta - \frac{1}{2}\int_{-1-y}^{y-1} \Omega_{31}(t)dt \,.(47)$$

Дифференцируя (47),с учетом (46),находим

$$\Omega_{31}(-1-y) = \tau_2''(y-1) - \varphi_4(y) + \varphi_3'(y) + \nu_2'(y-1) - \omega_{31}(y-1).$$

Дифференцируя (43) по x и полагая в полученном равенстве $x \to 0$,в силу (41),после некоторых вычислений,получим первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$:

$$\nu_3(y) = \tau_3'(y) + \beta_1(y),\ 0 \le y \le 1,(48)$$

где

$$\beta_1(y) = \tau_2'(-y) - \nu_2(-y) + \int_0^y \omega_{32}(\eta)d\eta + y\omega_{31}(-y).$$

Переходя в уравнениях (17) и (18) $(i=3)$ к пределу при $x \to 0$ в силу условий (13) и (15), находим

$$\mu_3(y) - \tau_3'(y) = \overline{\overline{\omega}}_{11}(-y) + \omega_{12}(y),(49)$$
$$\mu_3(y) - \tau_3''(y) = \Omega_{31}(-y) + \omega_{32}(y),(50)$$

где положено

$$\omega_{11}(x-y) = \begin{cases} \overline{\overline{\omega}}_{11}(x-y),\ -1 \le x-y \le 0, \\ \overline{\omega}_{11}(x-y),\ 0 \le x-y \le 1, \end{cases}$$

причем $\overline{\omega}_{11}(0) = \overline{\overline{\omega}}_{11}(0)$.

Дифференцируя уравнения (18) и (19) $(i=3)$ по x и полагая в полученных уравнениях $x \to 0$ в силу условий (13)-(16),получим

$$\theta_3(y)-\nu_3'(y)=b_2\overline{\overline{\omega'}}_{11}(-y),(51)$$
$$\theta_3(y)-\nu_3''(y)=b_2\Omega_{31}'(-y).(52)$$

Исключая из (49),(50) функцию $\mu_3(y)$,а из (51),(52) функцию $\theta_3(y)$ после некоторых выкладок, получим

$$\tau_3''(y)-\tau_3'(y)=\overline{\overline{\omega}}_{11}(-y)+\omega_{12}(y)-\omega_{31}(-y)-\omega_{32}(y),\ (53)$$
$$\overline{\overline{\omega'}}_{11}(-y)=\omega_{31}'(-y)-\left[\nu_3''(y)-\nu_3'(y)\right],(54)$$

Интегрируя (54),находим

$$\overline{\overline{\omega}}_{11}(-y)=-\left[\nu_3'(y)-\nu_3(y)\right]+\beta_2(y),(55)$$

где

$$\beta_2(y)=\left[\omega_{31}(-y)-\omega_{31}(0)\right]+\left[\nu_1'(0)-\tau_1'(0)\right]+\overline{\overline{\omega}}_{11}(0).$$

Подставляя (55) в (53),получим

$$\omega_{12}(y)=\left[\tau_3''(y)-\tau_3'(y)\right]-\left[\nu_3'(y)-\nu_3(y)\right]+\beta_3(y),(56)$$

где

$$\beta_3(y)=\omega_{31}(-y)+\omega_{32}(y)-\beta_2(y),$$

а $\overline{\overline{\omega}}_{11}(0)=\left[\mu_1(0)-\nu_1(0)\right]+\left[\omega_{31}(0)+\omega_{32}(0)\right]-\omega_{12}(0).$

Переходя в уравнении (17) к пределу при $y\to 0$ в силу условий (10) и (11),находим

$$\overline{\omega}_{11}(x)=\tau_1''(x)-\nu_1(x)-\omega_{12}(0).(57)$$

Теперь переходим в область G_1.Записываем решение уравнения (18), удовлетворяющего условиям (2),(11),(14):

$$u_1(x,y)=\int_0^y\tau_3(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)d\eta-\int_0^y\varphi_1(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)d\eta+$$
$$+\int_0^1\tau_1(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi-\int_0^y d\eta\int_0^\eta\overline{\overline{\omega}}_{11}(\xi-\eta)G(x,y;\xi,\eta)d\xi-$$
$$-\int_0^y d\eta\int_\eta^1\overline{\omega}_{11}(\xi-\eta)G(x,y;\xi,\eta)d\xi-\int_0^y\omega_{12}(\eta)d\eta\int_0^1 G(x,y;\xi,\eta)d\xi\,.\ (58)$$

Дифференцируя (58) по x и полагая $x\to 0$,с учетом равенств (55)-(57) после длинных вычислений,получим интегральное уравнение типа Абеля относительно $\tau_3''(y)$.Применяя обращение Абеля к этому уравнению,получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\tau_3''(y)$:

$$\tau_3''(y)+\int_0^y K(y,\eta)\tau_3''(\eta)d\eta=g(y),\ 0\le y\le 1,\ (59)$$

где $K(y,\eta)$, $g(y)$–известные функции,причем $K(y,\eta)$ имеет слабую особенность (порядка $1/2$), $g(y)$–непрерывная функция,а

$$\left.\begin{matrix}G(x,y;\xi,\eta)\\N(x,y;\xi,\eta)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\mp\exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}-$$

функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения (17).

Решая уравнение (59),находим функцию $\tau_3''(y)$,тем самым и функции $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$, $\omega_{11}(x-y)+\omega_{12}(y)$, $T_2(x)$.Тогда будут известными и функции $u_3(x,y)$ и $u_1(x,y)$.Итак,мы нашли решение поставленной задачи 1 единственным образом.

Замечание.В работах [1-4] был рассмотрен ряд краевых задач для уравнений второго,третьего и четвертого порядков параболо-гиперболического типа.

References:

1.Taxirov J.O.Kraevie zadachi dlya smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo uravneniya s izvestnoy i neizvestnoy liniyami razdela. Avtoreferat kandidatskoy dissertatsii.Tashkent,1988.
2.Berdishev A.S.Kraevie zadachi i ix spektralnie svoystva dlya uravneniya smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo i smeshanno-sostavnogo tipov.–Almati, 2015, 224 s.
3.Djuraev T.D., Mamajanov M. Kraevie zadachi dlya odnogo klassa uravneniy chetvertogo poryadka smeshannogo tipa. Differensialnie uravneniya,1986,t.22, №1,s.25-31.
4.Djuraev T.D.,Sopuev A.,Mamajanov M.Kraevie zadachi dlya uravneniy parabolo-giperbolicheskogo tipa.Tashkent,Fan, 1986, 220 s.